

ATTUALE STATO DELL'ANALISI FUNZIONALE DELLA CRESCITA DELLE COLTURE

Domenico Ditto^{1*}, Marco Acutis¹, Stefano Bocchi¹

¹ Dipartimento di Produzione Vegetale (Di.Pro.Ve.). Università degli Studi di Milano - Via Celoria 2, 20133 Milano

* domenico.ditto@unimi.it

Riassunto

We propose a critical review of the so-called functional approaches to the main mathematical models of crop growth analysis, following their development in terms of increasing complexity and flexibility with respect to the representation of experimental data. Each differential equation is analytically solved, defining moreover the main characteristic functions allowing the growth and yield description. The present work lays the theoretical basis required by software package assembling the properties of the analyzed models into a suitable, user-friendly software tool.

Parole chiave: Modelli matematici, metodi numerici, *fitting* non lineare, funzioni logistiche, analisi della crescita, strumenti software.

Introduzione

In anni recenti si è assistito a una rapida evoluzione nei metodi di analisi funzionale della crescita e dello sviluppo di specie erbacee. Tale analisi funzionale, estrema ed efficace sintesi di numerosi studi condotti su specie vegetali ed animali, viene basata sul cosiddetto modello differenziale da cui è stata originata. Il presente lavoro, che viene presentato come premessa sintetica di una più completa *review* sui principali modelli teorici di crescita (*asintotici* fino a quelli più complessi e recenti definiti *non asintotici*), risponde a interessi applicativi negli ambiti moderni di didattica e di ricerca.

Materiali e metodi

Modelli di crescita asintotici: Il più comune modello di crescita asintotico è quello logistico, introdotto per la prima volta da Verhulst (1838) in uno studio sulla dinamica delle popolazioni. Successivamente, fu impiegato anche per studiare il ritmo di accrescimento di specie erbacee a ciclo annuale. Il modello differenziale per questa funzione è del tipo:

$$\frac{dw}{dt} = k w_{\infty}^{-1} w (w_{\infty} - w) \equiv k w (1 - w_{\infty}^{-1} w) \quad (1)$$

dove $w(t)$ è la biomassa totale (ovviamente positiva), w_{∞} è il suo valore asintotico e k è un coefficiente costante di crescita culturale da ottenersi mediante un opportuno *fitting* numerico.

La soluzione analitica della (1) è della forma:

$$w = \frac{w_0 w_{\infty}}{w_0 + (w_{\infty} - w_0) \cdot e^{-kt}} \quad (2)$$

dove $w_0 \equiv w(t=0) > 0$. Fisiologi, ecologi ed agronomi sono per lo più interessati al caso $k > 0$, nel quale la curva di crescita assume la tipica forma sigmoide di fig. 1. L'attuale nostro interesse è maggiormente focalizzato sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, *non-lineari*, integrabili analiticamente. I modelli più semplici sono generalmente sviluppati con equazioni a variabili separabili riconducibili alla forma generale:

$$\frac{dw}{dt} = r w f(w) \equiv r G(w) \quad (3)$$

dove r costante opportuna, $f(w)$ una funzione assegnata caratteristica e $G(w) = w f(w)$. La variabile indipendente t non è presente sul lato destro della (3): equazioni di questo tipo sono chiamate *autonome*.

La funzione $f(w)$ decresce monotonicamente con w e gode delle proprietà:

$$1. \quad \lim_{w \rightarrow 0} w f(w) = 0 ; \quad (4)$$

$$2. \quad \text{esiste una costante } A > 0 \text{ tale che:}$$

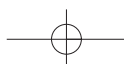
$$\begin{aligned} f(w) &> 0 \text{ per } w < A \\ f(w) &= 0 \text{ per } w = A \\ f(w) &< 0 \text{ per } w > A. \end{aligned} \quad (5)$$

I modelli asintotici di *Gompertz* e di *Chanter* (France e Thornley, 1984) sono più complessi, e appartengono ad una classe di equazioni differenziali di forma generale

$$\frac{dw}{dt} = r w f(w) \phi(t) \equiv r G(w) \phi(t) \quad (6)$$

Rispetto al modello generale (3), questi modelli aggiungono una dipendenza dal tempo attraverso la funzione $\phi(t)$: per tale caratteristica, sono equazioni differenziali ordinarie di primo ordine non lineari e non autonome. I modelli del tipo (3) e (6) hanno un andamento tipicamente logistico: al tendere di t all'infinito, la funzione $w(t)$ tende ad un asintoto orizzontale che è anche il massimo valore possibile della funzione di crescita. È stato, infine, dimostrato che molti modelli di crescita logistica asintotici, sono ottenibili da un unico modello generalizzato (Tsoularis e Wallace, 2002).

Modelli di crescita non asintotici: Le curve di crescita di molte colture erbacee annuali dopo il raggiungimento della massima crescita, manifestano una fase di senescenza (cioè un decremento di biomassa totale) dovuta agli effetti di vari fattori (ambientali, fisiologici, agronomici, etc.). I modelli di crescita asintotici del tipo (3) e (6) non sono in grado di descrivere questo comportamento: ciò dipende dalla loro stessa struttura. Infatti, il valore limite w_{∞} di un qualsivoglia modello asintotico, è caratteristico dell'equazione differenziale di origine e non può essere cambiato aggiungendo semplicemente un termine (dove μ è un parametro) all'equazione di base. Nel



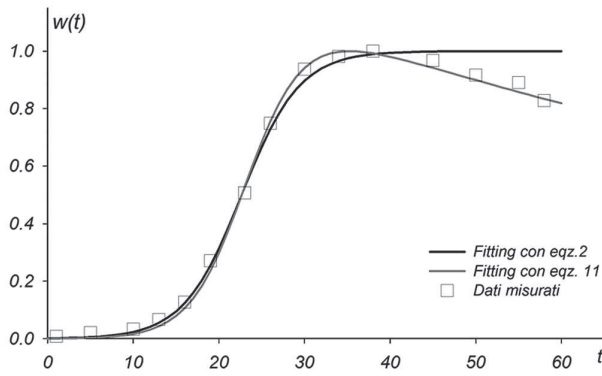


Fig.1 - Esempio di fitting su dati normalizzati dei modelli di crescita (2) e (11).

caso più comune del modello logistico (1), anche aggiungendo un termine che tenga conto dello stadio di senescenza si ha:

$$\frac{dw}{dt} = k w (1 - w_{\infty}^{-1} w) - \mu w; \quad \mu < k \quad (7)$$

e le proprietà dinamiche del modello rimangono invariate. Un possibile approccio non asintotico si basa su una opportuna modifica strutturale della (6), nella forma (Richter *et al.*, 1991; Werker e Jaggard, 1997)

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w \phi(t) - \mu w; \quad (8)$$

con λ costante opportuna e

$$\phi(t) = \frac{\alpha}{e^{\beta t} + \alpha} \geq 0; \quad \alpha, \beta > 0; \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} < 1. \quad (10)$$

I parametri α e β determinano la forma della curva $\phi(t)$ la quale decresce, in modo sigmoidale, dal suo valore massimo, a zero.

Risultati

L'integrazione della (8) fornisce la soluzione

$$\hat{w} = (1 + \alpha e^{-\beta t})^{-\lambda/\beta} \kappa e^{-\mu t}; \quad 0 < \hat{w} < 1 \quad (11)$$

normalizzata sul suo valore massimo w_m , con $\hat{w} = w/w_m$ e

$$\kappa = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu} \right)^{\lambda/\beta} \left[\alpha \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right) \right]^{\mu/\beta} \quad (12)$$

$$w_m = w_0 \left[\frac{(\alpha + 1)(\lambda - \mu)}{\lambda} \right]^{\lambda/\beta} \left[\alpha \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right) \right]^{-\mu/\beta} \quad (13)$$

Il grafico di fig.1, mostra sia la soluzione asintotica (2) sia la soluzione non asintotica (11).

Dalla figura si osserva la grande flessibilità di adattamento ai dati sperimentali offerto dal modello (11) specialmente nello stadio di senescenza.

Conclusioni

La review, qui sinteticamente presentata, avrà una forma completa ove verranno definite e analizzate, per ogni modello, le pertinenti soluzioni, unitamente ai principali indici (AGR, RGR, NAR, etc.), base della cosiddetta *Functional Plant Growth Analysis* (Hunt, 1982).

Bibliografia

- France J., Thornley J. H. M., 1984. *Mathematical Models in Agriculture*. Butterworth, London, 355 pp.
- Hunt R., 1982. *Plant Growth Curves: the functional approach to plant growth analysis*. Edward Arnold, London, 284 pp.
- Richter O., Spickermann U., Lenz F., 1991. A new model for plant Growth. *Gartenbauwissenschaft*, 56, 99-106.
- Tsoularis A., Wallace J., 2002. Analysis of logistic growth models. *Math. Biosci.*, 179, 21-55.
- Werker A. R., Jaggard K. W., 1997. Modeling Asymmetrical Growth Curves that Rise and then Fall: Application to Foliage Dynamics of Sugar Beet (*Beta Vulgaris*). *Ann. Bot.*, 79, 657-665.